CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

PREMIER VOLET

Première épreuve

Exercice 1

Solution possible n°1.

Nommons c le chiffre des centaines, d le chiffre des dizaines et u le chiffre des unités du nombre de trois chiffres considéré dans l'énoncé.

Nous savons que c, d et u sont tels que :

(1) $100c+10d+u - (100u+10d+c) = 297$

(2) $c + d + u = 11$

(3) $3c + 2d = 22$

La relation (1) peut s'écrire $99c - 99u = 297$, soit encore $c - u = 3$

Les nombres c, d et u sont donc tels que :

(4) $c = u + 3$

(5) $d + 2u = 8$

(6) $2d + 3u = 13$

En utilisant (4), on peut déduire de (5) que d est tel que : $d = 8 - 2u$; puis, en reportant dans (6) que u est tel que : $16 - 4u + 3u = 13$, soit $u = 3$.

Les relations (4) et (5) montrent alors que c ne peut être égal qu'à 6 et d à 2.

Nous avons montré que s'il existe un nombre de trois chiffres vérifiant les conditions de l'énoncé il ne peut s'agir que de : 623.

Examinons si le nombre 623 vérifie ou non les conditions de l'énoncé :

$623 - 326 = 297$ $\quad 6+2+3 = 11$ $\quad 3\times6+2\times2 = 22.$

On conclut : 623 est le nombre cherché.

Solution possible n°2

$$\begin{array}{cccc} & c & d & u \\ - & u & d & c \\ \hline & 2 & 9 & 7 \end{array} \qquad \text{donc :} \qquad \begin{array}{cccc} & u & d & c \\ + & 2 & 9 & 7 \\ \hline & c & d & u \end{array}$$

En examinant les dizaines on voit qu'il y a obligatoirement une retenue qui provient de l'addition des unités (en effet on ne peut avoir ni d+9=d ni d+9=10+d ; en revanche 1+d+9=10+d est vrai quelle que soit la valeur de d).

On a donc en considérant l'addition des unités : $c+7=10+u$ soit $c=u+3$.

On peut examiner tous les cas possibles en tenant compte du fait que la somme des trois chiffres est 11 :

u	c	d	$3c+2d$
0	3	8	25
1	4	6	24
2	5	4	23
3	6	2	22
4	7	0	21
5	8		
6	9		

La seule possibilité pour que l'on ait « la somme du triple du chiffre des centaines et du double du chiffre des dizaines est 22 » est de prendre u=3, c=6 et d=2.

Examinons si le nombre 623 vérifie ou non les conditions de l'énoncé :

$623 - 326 = 297 \qquad 6+2+3 = 11 \qquad 3\times6+2\times2 = 22.$

On conclut : <u>623 est le nombre cherché.</u>

Remarques

- *Il y a beaucoup d'autres modes de résolution possibles en mêlant écriture et résolution d'équations puis essais de toutes les possibilités dès que le champ des possibles a été un peu restreint.*
- *L'énoncé ne demande que de trouver le nombre et dans sa formulation il indique qu'il n'y a qu'un nombre qui convient : la seule justification que l'on peut être en droit d'attendre d'un candidat est la preuve que le nombre qu'il propose convient.*

Exercice 2

a) Première solution :

Calculons AO.

L'arête [B'C'] est orthogonale au plan de la face ABB'A' et donc orthogonale à la droite (AB') qui est contenue dans ce plan : le triangle AB'C' est rectangle en B'.

D'après l'énoncé de Pythagore :

- dans le triangle ABB' rectangle en B, $AB'^2=AB^2+BB'^2$ soit $AB'^2=32$,
- dans le triangle AB'C' rectangle en B', $AC'^2=AB'^2+B'C'^2$ soit $AC'^2=48$.

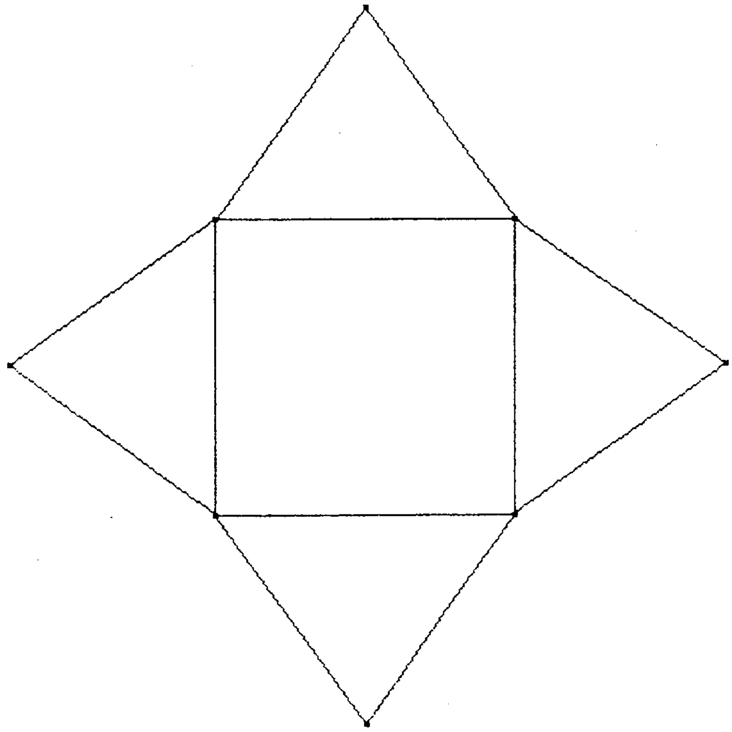
On en déduit : $AC'=4\sqrt{3}$. Comme O est le centre du cube, O est en particulier le milieu de [AC'] donc: $AO=2\sqrt{3}$. Une valeur approchée au millimètre près de AO est 3,5cm.

Autre solution :

- construire en vraie grandeur le triangle rectangle ABB' (avec AB=BB'=4cm),
- sur la même figure construire en vraie grandeur le triangle rectangle AB'C' (avec B'C'=4cm et (B'C') perpendiculaire à (AB')),
- construire le milieu O de [AC'].

On obtient ainsi la longueur AO que l'on pourra reporter au compas sans la calculer et la mesurer.

<u>Le patron comporte un carré de côté 4cm et quatre triangles isocèles de base 4cm et dont les deux autres côtés ont même mesure que [AO].</u>

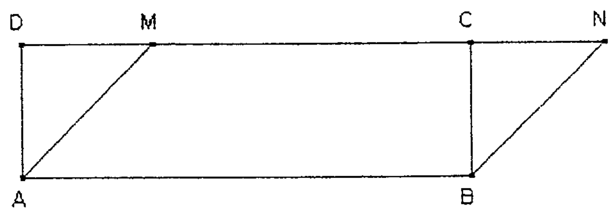


b) Le cube « contient » six pyramides identiques à la pyramide OABB'A' : les six pyramides ayant pour sommet O et pour bases les six faces du cube.
Le volume du cube est 4^3 cm^3 soit 64 cm^3.
On conclut : le volume de la pyramide OABB'A' est 10,667 cm^3 à 1 mm^3 près.

Remarque.
L'énoncé demande seulement un dessin du patron de la pyramide : aucune explication n'est attendue bien que le corrigé en fournisse.

Exercice 3

1) a)



ABMN est un parallélogramme donc : MN=AB et AM=BN.
ABCD est un rectangle donc : AB=DC.
On en déduit que :

- DM=CN (MN=DC s'écrit MC+CN=DM+MC)
- les triangles ADM et BCN sont isométriques (DM=CN, AD=BC, AM=BN).

(On aurait pu aussi montrer que le triangle BCN est l'image du triangle ADM par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.)
Deux triangles isométriques ont même aire donc :

aire (ABCM)+aire(ADM)= aire (ABCM)+aire(BCN).

On conclut : <u>les quadrilatères ABNM et ABCD ont même aire.</u>

b) Compte tenu de la position relative des points D, C, M et N : CN=CM+MN et DM=DC+CM.
De plus, comme dans la question précédente, MN=AB et DC=AB.
On en déduit : CN=DM.
On a aussi, comme dans la question précédente, AD=BC et AM=BN.
On en conclut que les triangles ADM et BCN sont isométriques et donc ont même aire.
(On pouvait aussi montrer que le triangle BCN est l'image du triangle ADM par la translation de vecteur AB.)

Nommons K le projeté orthogonal de N sur (AB).
On peut écrire : aire (ABCD) = aire (AKND) - aire (BKN) – aire (BCN).
et aire (ABNM) = aire (AKND) – aire (BKN) – aire (ADM).

On conclut : <u>les quadrilatères ABCD et ABNM ont même aire.</u>

c)

On peut construire un carré ABCD de côté 1cm, placer un point M sur la droite (DC) tel que AM soit supérieur à 10cm, puis construire le point N tel que ABNM est un parallélogramme. (Placer un point M sur (CD) tel que AM soit supérieur à 10cm est toujours possible : un cercle de centre A et de rayon supérieur à 10cm coupe (CD) en deux points puisque la distance de son centre A à la droite (CD) est 1cm donc inférieure au rayon.)

D'après la question **1) b)** les quadrilatères ABNM et ABCD ont même aire donc l'aire du parallélogramme ABNM est 1cm².

Le périmètre du parallélogramme ABNM ainsi construit est supérieur à 20cm puisque, par construction, deux des côtés de ce parallélogramme ont une longueur supérieure à 10cm.

<u>Le parallélogramme ABNM construit vérifie les conditions indiquées</u>.

On pourrait construire un parallélogramme dont l'aire serait 1cm² et dont le périmètre serait supérieur à 1m : il suffirait de reprendre la construction précédente en plaçant M sur la demi-droite [CD) à plus de 50cm du point D (car, AM étant supérieur à DM, AM serait ainsi supérieur à 50cm).

2. **a)** Si a est la mesure exprimée en centimètres de l'un des côtés d'un rectangle de périmètre $2p$:
   - la mesure de l'autre côté du rectangle est $(p - a)$,
   - l'aire du rectangle, exprimée en cm², est $S = a\,(p - a)$.

   Or, $a\,(p - a) = - a^2 + ap$
   $a\,(p - a) = - (a^2 - ap)$

$$a\,(p - a) = -\left(a-\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}$$

On conclut : <u>l'aire S du rectangle ABCD, exprimée en cm², est : $S = -\left(a-\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}$.</u>

b) Quel que soit le nombre a, $\left(a-\frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $-\left(a-\frac{p}{2}\right)^2 \leq 0$ et

$-\left(a-\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4} \leq \frac{p^2}{4}$.

Tous les rectangles de périmètre $2p$ ont donc une aire inférieure ou égale à $\frac{p^2}{4}$.

L'aire du carré de côté $\frac{p}{2}$ est $\frac{p^2}{4}$.

On conclut : <u>parmi tous les rectangles de périmètre $2p$, le carré de côté $\frac{p}{2}$ est celui qui a la plus grande aire</u>.

Remarques

- *Questions 1a) et 1b) : la justification du fait que certains triangles sont isométriques et donc ont même aire n'est pas réellement attendue car ce fait peut être considéré comme évident par certains (peut-être un bonus pour les candidats qui présenteraient une démonstration complète et rigoureuse en particulier en mettant en évidence le rôle joué par la position relative des points ?).*
- *Question 1c) : il est explicitement demander de prouver que le parallélogramme construit a bien une aire de 1cm² et un périmètre supérieur à 20cm.*

Deuxième épreuve

Analyse de 4 travaux d'élèves - Extraits des cahiers d'évaluation CE2

1)
Maîtrise de la notion de triangle
Maîtrise de la notion de milieu d'un segment
Distinction point / lettre
Tri d'information (lettre D)
Maîtrise des instruments

2)

	A	B	C	D
Maîtrise de la notion de triangle			X	
Maîtrise de la notion de milieu d'un segment				
Distinction point / lettre	/	X	X	X
Nommer un point par une lettre				
Tri d'information (lettre D)	X	X	X	X
Maîtrise des instruments		X	/	X

X : maîtrise de la notion
/ : maîtrise incertaine de la notion

a) confusion entre le chemin ABC et le triangle ABC → deux côtés seulement sont tracés → travaux des élèves A, B et D
b) Le sens du mot milieu reste vague. Le milieu reste souvent, pour des enfants de cet âge, situé à l'intérieur d'une figure ou entre les deux extrémités d'un segment (confusion milieu/entre) → travaux des élèves A, B, C et D
c) La notion de point n'est pas encore forcément acquise. La confusion peut être faite entre lettre et point. Placer le point est une chose, le nommer en tant que lettre en est une autre → travaux des élèves A, B, C et D
d) Le point D, déjà tracé sur le quadrillage, constitue un élément parasite puisque cette donnée supplémentaire n'est pas pertinente pour effectuer l'exercice proposé. Ce n'est pas un piège pour l'élève mais un élément nécessaire de tri d'informations. → travail bien réalisé dans tous les cas
e) La maîtrise des instruments de tracé (règle – crayon) est nécessaire à la bonne réalisation de cet exercice. → travaux des élèves B et D

3)
Non, les élèves peuvent suivre le « chemin » ABC sans s'attacher au terme « triangle ».

- SECOND VOLET -

1 – On s'intéresse à l'ensemble de l'extrait

a) A quel niveau d'enseignement correspond ce document ?
Cycle des approfondissements – CM2

b) Quelles sont les notions minimum que les élèves doivent maîtriser pour pouvoir aborder cette séquence ?
- *notion d'aire et de périmètre*
- *notion de proportionnalité*
- *maîtrise des quatre opérations*

2 – On s'intéresse à la partie « Je découvre »

a) activité 1 :

- Quelle est la part de l'activité de l'élève ?
  - *Le calcul d'aires et de périmètres du rectangle et de figures à base de rectangles.*
  - *L'observation, la mise en relation des résultats obtenus.*
  - *L'incitation à une formulation des conclusions*

- La dernière question est : « Que remarques-tu ? »

• D'après le livre du maître, énoncer la réponse attendue pour cette question.

Deux surfaces de formes différentes mais composées des mêmes éléments ont la même aire.
Aire et périmètre ne varient pas dans le même sens.

• Proposer une ou des consignes qui permettraient de guider les élèves vers cette réponse.
- *Faire un tableau mettant en relation aire et périmètre de chaque figure puis classer selon son choix (périmètre, aire)*
- *Pour les figures de 7 et 8 timbres, faire varier la forme de la figure, → voir le périmètre évoluer (consigne supplémentaire : les figures doivent se toucher par un côté au minimum).*

b) activité 2 – question a

- Imaginer deux solutions d'élèves qui pourraient être validées.

• *solution 1 : $16 \div 3,2 = 5$; 5 est un nombre entier, la solution est valide.*

• *solution 2 : tâtonnement à partir de la donnée « la longueur est un nb entier de mètres » :*
$3,2 \times 6 = 19,2$ → trop grand
$3,2 \times 4 = 12,8$ → trop petit
$3,2 \times 5 = 16$ → résultat correct, la solution est valide

3 – On s'intéresse aux exercices 1, 2 et 4 de la partie intitulée « Je m'entraîne » du manuel élève.

a) En quoi ces exercices 1,2 et 4 sont-ils complémentaires ? Indiquer les apports de chacun.

Ils utilisent tous les trois le principe qu'à partir de formules différentes utilisant les mêmes variables, les résultats ne vont pas aller forcément dans le même sens.
La recherche est déductive et progressive, les conclusions de chacun d'entre eux permettant d'envisager la résolution du suivant.

	Apports de ces exercices
Exercice 1	*La règle est à établir par les élèves.* *Le périmètre est constant, on ne fait varier que l'aire.* *Le cas particulier du carré est abordé et souligné.*
Exercice 2	*Réinvestissement de l'exercice 1.* *Représentation géométrique des différentes solutions.* *Réinvestissement du cas particulier du carré.*
Exercice 4	*Application « ouverte » des deux exercices précédents.* *Les solutions ne sont pas nombreuses et permettent de vérifier la compréhension des deux exercices précédents.*

b) Quelles conclusions pourrait-on formuler aux élèves après qu'ils aient traité ces trois exercices ?

- *Deux rectangles peuvent avoir le même périmètre sans avoir la même aire.*
- *Deux rectangles peuvent avoir la même aire sans avoir le même périmètre.*
- *En modifiant ses dimensions, on peut diminuer l'aire d'un rectangle tout en augmentant son périmètre.*
- *Parmi tous les rectangles qui ont un périmètre fixé celui qui a l'aire la plus grande est le carré.*

4 – On s'intéresse à de possibles prolongements.

Proposer un énoncé d'exercice qui mette en jeu simultanément les trois notions de proportionnalité, d'aire et de périmètre d'un rectangle ou d'un carré.

Proposition :

a) Quel est le périmètre d'un rectangle de longueur 9cm et de largeur 3cm ? son aire ?
b) Si tu doubles les mesures des côtés de ce rectangle, que devient son périmètre ? son aire ?
c) Si tu triples la largeur du rectangle de départ, que devient son périmètre ? son aire ?